55. En el ejercicio 37 graficamos los montos resultantes en diferentes periodos después de invertir \$100 a 7% de interés simple y a 7% de interés capitalizable cada año.

a) Utilice la fórmula del interés compuesto dada en el ejemplo 5 para determinar el monto que se obtiene después de 10 años, por una inversión de \$100 a una tasa de 7% de interés capitalizable diariamente (suponga que cada año es de 365 días).

b) Calcule la diferencia entre el monto que se obtiene 10 años después de invertir \$100 a 7% de interés simple, y el monto que se obtiene transcurrido el mismo plazo al invertir \$100 a 7% de interés capitalizable diariamente.

56. Grafique $y = 2^x$ y $y = 3^x$ en la misma ventana.

57. **a)** Grafique $y = 3^{x-5}$.

b) Utilice su calculadora graficadora para resolver la ecuación $4 = 3^{x-5}$. Redondee su respuesta al centésimo más cercano.

58. **a)** Grafique $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}$.

b) Utilice su calculadora graficadora para resolver la ecuación $-3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+3}$.

Reto

59. Suponga que Bob Jenkins le da a Carol Dantuma \$1 en el día 1, \$2 en el día 2, \$4 en el día 3, \$8 en el día 4, y continúa duplicando la cantidad durante 30 días.

a) Determine cuánto le dará Bob a Carol el día 15.

b) Determine cuánto le dará Bob a Carol el día 20.

c) Usando la forma exponencial, exprese el monto que Bob le da a Carol el día n.

d) ¿Cuánto le dará Bob a Carol el día 30? Escriba la cantidad en forma exponencial. Luego utilice su calculadora para evaluar.

e) Exprese el monto total que Bob le da a Carol durante los 30 días, como una suma de términos exponenciales. (No determine el valor real.)

Actividad en grupo

60. Las funciones exponenciales o aproximadamente exponenciales son muy comunes.

a) Que cada miembro del grupo determine, de manera individual, una función que no haya sido dada en esta sección y que pueda aproximarse a una función exponencial. Pueden utilizar periódicos, libros y otras fuentes.

b) Analicen en grupo las funciones de todos los miembros. Determinen si cada función presentada es una función exponencial.

c) Escriban en grupo un ensayo en el que analicen cada una de las funciones y establezcan por qué creen que cada una de ellas es exponencial.

Ejercicios de repaso acumulativo

[5.1] **61.** Considere el polinomio

$$2.3x^4y - 6.2x^6y^2 + 9.2x^5y^2$$

a) Escriba el polinomio en orden descendente de la variable x.

b) ¿Cuál es el grado del polinomio?

c) ¿Cuál es su coeficiente principal?

[5.2] **62.** Si $f(x) = x + 5$ y $g(x) = x^2 - 2x + 4$, determine $(f \cdot g)(x)$.

[7.1] **63.** Escriba $\sqrt{a^2 - 8a + 16}$ como un valor absoluto.

[7.3] **64.** Simplifique $\sqrt[4]{\dfrac{32x^5y^9}{2y^3z}}$.

9.3 Funciones logarítmicas

1 Convertir de forma exponencial a forma logarítmica.

2 Graficar funciones exponenciales.

3 Comparar gráficas de funciones exponenciales y logarítmicas.

4 Resolver problemas de aplicación con funciones logarítmicas.

1 Convertir funciones de forma exponencial a forma logarítmica

Estamos preparados para hablar de **logaritmos**. Considere la función exponencial $y = 2^x$. Como se mencionó en la sección 9.1, para determinar la función inversa intercambiamos x y y y despejamos y en la ecuación resultante. Al intercambiar x y y se obtiene la ecuación $x = 2^y$, pero no hay forma de despejar y en la ecuación $x = 2^y$. A continuación se presenta una nueva definición que nos ayudará a lograrlo.

Logaritmo

Para todos los números positivos a, donde $a \neq 1$,

$$y = \log_a x \text{ significa } x = a^y$$

De acuerdo con la definición de logaritmo, $x = 2^y$ significa $y = \log_2 x$. Por lo tanto, podemos deducir que $y = 2^x$ y $y = \log_2 x$ son funciones inversas. En general, $y = a^x$ y $y = \log_a x$ son funciones inversas.

En la ecuación $y = \log_a x$, *log* es una abreviatura de la palabra *logaritmo*; $y = \log_a x$ se lee "y es el logaritmo de x en la base a". La letra y representa el logaritmo, la letra a la base, y la letra x el número.

$$\overset{\substack{\text{logaritmo}\\\text{(exponente)}}}{y} = \underset{\text{base}}{\log_a}\ \overset{\text{número}}{x} \qquad \text{significa} \qquad \underset{\text{número}}{x} = \underset{\text{base}}{a}^{\overset{\text{exponente}}{y}}$$

En otras palabras, el logaritmo del número x en la base a, es el *exponente* al cual debe elevarse ésta para obtener el número x. En resumen, *un logaritmo es un exponente*. Por ejemplo,

$$2 = \log_{10} 100 \text{ significa } 100 = 10^2$$

En $\log_{10} 100 = 2$, el logaritmo es 2, la base es 10 y el número es 100. El logaritmo, 2, es el *exponente* al que debe elevarse la base, 10, para obtener el número, 100. Observe que $10^2 = 100$.

A continuación se presentan algunos ejemplos de cómo una expresión exponencial puede convertirse en una expresión logarítmica.

Forma exponencial	Forma logarítmica
$10^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$
$4^2 = 16$	$\log_4 16 = 2$
$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$	$\log_{1/2} \frac{1}{32} = 5$
$5^{-2} = \frac{1}{25}$	$\log_5 \frac{1}{25} = -2$

Resolvamos algunos ejemplos que requieren la conversión de la forma exponencial a la forma logarítmica, y viceversa.

EJEMPLO 1 ▸ Escriba cada ecuación en forma logarítmica.

a) $3^4 = 81$ **b)** $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$ **c)** $2^{-5} = \frac{1}{32}$

Solución

a) $\log_3 81 = 4$ **b)** $\log_{1/5} \frac{1}{125} = 3$ **c)** $\log_2 \frac{1}{32} = -5$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 31

EJEMPLO 2 ▸ Escriba cada ecuación en forma exponencial.

a) $\log_7 49 = 2$ **b)** $\log_4 64 = 3$ **c)** $\log_{1/3} \frac{1}{81} = 4$

Solución

a) $7^2 = 49$ **b)** $4^3 = 64$ **c)** $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

▸ Ahora resuelva el ejercicio 47

EJEMPLO 3 ▸ Escriba cada ecuación en la forma exponencial; luego determine el valor desconocido.

a) $y = \log_5 25$ **b)** $2 = \log_a 16$ **c)** $3 = \log_{1/2} x$